

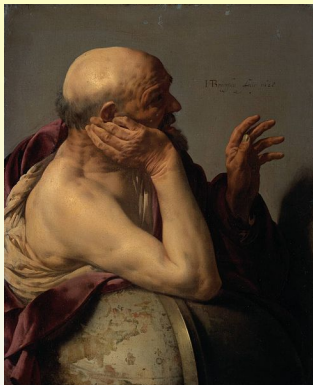
Πάντα ρηι ος ποταμòς (Todo fluye como un río)

Fabio Rosso

Departamento de Matemática "Ulisse Dini", Univ. Firenze, Italy

ITLA Conferencia, Rosario (AR) diciembre 2012

¿ Qué ha



Heraclitus de Ephesus (535 - 475 BCE)
(Hendrick ter Brugghen, 1628. Rijksmuseum, Amsterdam)

que ver con la dinámica de fluidos?

En la dinámica de fluidos se utilizan muchos modelos aproximados para describir una realidad física muy compleja.

En la dinámica de fluidos se utilizan muchos modelos aproximados para describir una realidad física muy compleja.

A veces te encuentras con paradojas!

Hay varios: por ejemplo muy bien conocidos son lo de Stokes, lo de D'Alembert

(y otros, más para especialistas, como lo de Whitehead, lo de Olmstead & Gautesen, lo de Sternberg & Koiter...)

En la dinámica de fluidos se utilizan muchos modelos aproximados para describir una realidad física muy compleja.

A veces te encuentras con paradojas!

Hay varios: por ejemplo muy bien conocidos son lo de Stokes, lo de D'Alembert

(y otros, más para especialistas, como lo de Whitehead, lo de Olmstead & Gautesen, lo de Sternberg & Koiter...)

El propósito de hoy es dar cuenta de un modelo muy famoso en la dinámica de fluidos (**el modelo de Bingham**) y **su conflicto con otro modelo fundamental (la teoría de la lubricación)**.

Resumen

- 1 El modelo “clásico” de Bingham
- 2 El mito de la tensión de fluencia
- 3 Teoría de la lubricación (muy en breve!)
- 4 Primera paradoja: canal horizontal de ancho variable
- 5 Segunda paradoja: movimiento sobre una superficie inclinada que no es un plano

Ecuación constitutiva para el modelo de Bingham

\mathbf{T}^* (estrés de Cauchy), $\mathbf{T}^* = -P^*\mathbf{I} + \mathbf{S}^*$, donde $-P^*\mathbf{I}$ es el estrés debido a la condición de incompresibilidad mecánico

$$\text{tr } \mathbf{D}^* = \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial y^*} = 0.$$

El tensor \mathbf{S}^* viene dado por la relación constitutiva implícita

$$\left[\mathbf{S}^* - \left(2\eta^* + \frac{\tau_o^*}{\|\mathbf{D}^*\}} \right) \mathbf{D}^* \right] \Theta(\|\mathbf{S}^* - \tau_o^*\}) + \mathbf{D}^* \Theta(\tau_o^* - \|\mathbf{S}^*\}) = 0, \quad (1)$$

donde η^* es la **viscosidad**, τ_o^* es el **umbral de estrés** y

- $\Theta(z)$ es la **función de Heaviside**,
- $\|\mathbf{S}^*\} = \sqrt{1/2 \text{tr } \mathbf{S}^{*2}}$, $\|\mathbf{D}^*\} = \sqrt{1/2 \text{tr } \mathbf{D}^{*2}}$ (segundo invariante de \mathbf{S}^* y de \mathbf{D}^* respectivamente)

¿ Que es la " tensión de fluencia" (umbral de estrés) τ_0^* ?

¿ Que es la “ tensión de fluencia” (umbral de estrés) τ_0^* ?

La tensión de fluencia τ_0^* de un sólido: es el punto en el que, cuando la tensión aplicada se incrementa, aparece un comportamiento similar a los líquidos, es decir, la deformación continua.

De la misma manera,
la tensión de fluencia τ_0^* de un líquido estructurado: es el punto en el que, cuando la tensión aplicada se disminuye, aparece un comportamiento similar a los sólidos, es decir, ninguna deformación continua.

¿ Que es la “ tensión de fluencia” (umbral de estrés) τ_0^* ?

La tensión de fluencia τ_0^* de un sólido: es el punto en el que, cuando la tensión aplicada se incrementa, aparece un comportamiento similar a los líquidos, es decir, la deformación continua.

De la misma manera,
la tensión de fluencia τ_0^* de un líquido estructurado: es el punto en el que, cuando la tensión aplicada se disminuye, aparece un comportamiento similar a los sólidos, es decir, ninguna deformación continua.

Criterio de von Mises: la transición entre los dos regímenes (rígido \leftrightarrow fluido) depende de si $\|s^* \leq \tau_0^*$ (rígido $D^* = 0$) o $\|s^* \geq \tau_0^*$ (fluido $D^* \neq 0$) (hay una frontera libre, que está definida implícitamente por $\|s^* = \tau_0^*$!)

Comentarios

Comentarios

- 1 El modelo de Bingham se utiliza ampliamente en aplicaciones
Sin embargo

Comentarios

- 1 El modelo de Bingham se utiliza ampliamente en aplicaciones Sin embargo *Hay experimentos que sugieren fuertemente que la **escala de tiempo** es muy importante.*

Comentarios

- 1 El modelo de Bingham se utiliza ampliamente en aplicaciones Sin embargo
*Hay experimentos que sugieren fuertemente que la **escala de tiempo** es muy importante.*
*Además, hay experimentos que sugieren con fuerza que el **grado de precisión de la medida experimental** de la velocidad de deformación es esencial.*

Comentarios

- 1 El modelo de Bingham se utiliza ampliamente en aplicaciones
Sin embargo
*Hay experimentos que sugieren fuertemente que la **escala de tiempo** es muy importante.*
*Además, hay experimentos que sugieren con fuerza que el **grado de precisión de la medida experimental** de la velocidad de deformación es esencial.*
- 2 Su significado físico siempre ha sido un tema de controversia académica

Comentarios

- 1** El modelo de Bingham se utiliza ampliamente en aplicaciones
Sin embargo
*Hay experimentos que sugieren fuertemente que la **escala de tiempo** es muy importante.*
*Además, hay experimentos que sugieren con fuerza que el **grado de precisión de la medida experimental** de la velocidad de deformación es esencial.*
- 2** Su significado físico siempre ha sido un tema de controversia académica
- 3** ¿ Hay, en realidad, "fluidos de Bingham" (se puede observar en el laboratorio algo así)?

El experimento más largo en la historia: la gota de brea

¿Porque el modelo de Bingham siempre ha sido un tema de controversia?

El experimento más largo en la historia: la gota de brea

¿Porque el modelo de Bingham siempre ha sido un tema de controversia? ! **La escala de tiempo es importante !**

El experimento más largo en la historia: la gota de brea

¿Porque el modelo de Bingham siempre ha sido un tema de controversia? ! **La escala de tiempo es importante !**

En la figura se ve una mancha de un material muy duro (brea de alquitrán, “tar” en inglés).



¡Cualquiera diría que es un material **rígido!**

La figura muestra el mismo material que produce gotas por gravedad. **¿Como es esto posible?**



¡La brea tiene una viscosidad de aproximadamente 100 billones (10^{11}) de veces la del agua! ¿Cuanto tiempo para ver una gota?

El experimento la más largo en la historia: la gota de brea

Cronología (Hecho por la Universidad de Queensland (Au) y sigue controlado.)

Fecha	Evento	Duración (Años)
1927	Preparación	
1930	Corte del cuello	
Dic. 1938	Cae la primera gota	8.9
Feb. 1947	Cae la segunda gota	8.3
Abr. 1954	Cae la tercera gota	7.2
Mayo 1962	Cae la cuarta gota	8.1
Ago. 1970	Cae la quinta gota	8.3
Abr. 1979	Cae la sexta gota	8.7
Jul. 1988	Cae la séptima gota	9.3
Nov. 2000	Cae la octava gota	12.3
¿2012-2013 ?	Cae la nona gota	$\geq 11?$

La controversia académica

Muchos autores han discutido el significado físico del modelo de Bingham en relación con la imposibilidad de medir una velocidad de deformación de orden muy pequeño (de nuevo un problema de escala)

Barnes (J. Non-Newtonian Fluid Mech., 1999) *The yield stress – a review of “Παντα ρηει” – Everything flows?*

“These materials nevertheless show slow but continual steady deformation when stressed for a long time below yield stress, having shown an initial linear elastic response to the applied stress”. The existence of a yield stress is a myth!

Astarita (J. Rheol., 1990) *The engineering reality of the yield stress*

“Whether yield stress is or is not an engineering reality depends on what problem we are considering”

¿Cual es el problema en realidad?

¿Cual es el problema en realidad?

- 1 La cuestión no es si el modelo describe los fluidos reales. En muchos casos, el modelo (clásico, con núcleo rígido) describe muy bien las observaciones experimentales!

¿Cual es el problema en realidad?

- 1 La cuestión no es si el modelo describe los fluidos reales. En muchos casos, el modelo (clásico, con núcleo rígido) describe muy bien las observaciones experimentales!
- 2 **Muchísimos ejemplos exitosos:** *chocolate fundido, purés de tomate, helado, crudo ceroso aceites, lavas volcánicas, arcilla, pintura de aceite, pasta de dientes, mayonesa, yogures, purés, pesticidas líquidos, caldos de bio-masa, sangre, mezclas agua-carbón, fundidos líquido-cristalinas de polímeros, plásticos explosivos, espumas, cohete para propulsor....*

¿Cual es el problema en realidad?

- 1 La cuestión no es si el modelo describe los fluidos reales. En muchos casos, el modelo (clásico, con núcleo rígido) describe muy bien las observaciones experimentales!
- 2 Muchísimos ejemplos exitosos: *chocolate fundido, purés de tomate, helado, crudo ceroso aceites, lavas volcánicas, arcilla, pintura de aceite, pasta de dientes, mayonesa, yogures, purés, pesticidas líquidos, caldos de bio-masa, sangre, mezclas agua-carbón, fundidos líquido-cristalinas de polímeros, plásticos explosivos, espumas, cohete para propulsor....*
- 3 **En realidad, el problema haría si el modelo de Bingham es o no es coherente con otros modelos utilizados en dinámica de fluidos...**

¿Cual es el problema en realidad?

- 1 La cuestión no es si el modelo describe los fluidos reales. En muchos casos, el modelo (clásico, con núcleo rígido) describe muy bien las observaciones experimentales!
- 2 Muchísimos ejemplos exitosos: *chocolate fundido, purés de tomate, helado, crudo ceroso aceites, lavas volcánicas, arcilla, pintura de aceite, pasta de dientes, mayonesa, yogures, purés, pesticidas líquidos, caldos de bio-masa, sangre, mezclas agua-carbón, fundidos líquido-cristalinas de polímeros, plásticos explosivos, espumas, cohete para propulsor....*
- 3 En realidad, el problema haría si el modelo de Bingham es o no es coherente con otros modelos utilizados en dinámica de fluidos...**y esto ocurre, por ejemplo, cuando el modelo está acoplado con la teoría de la lubricación.**

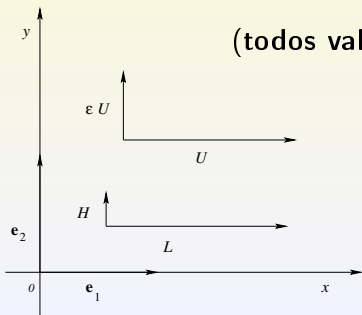
Teoría de la lubricación (muy en breve)

Sean H y L longitudes características y $\epsilon =: \frac{H}{L} \ll 1$ (aspect ratio),

$$\underbrace{\text{Fr}}_{\text{n. de Froude}} =: \frac{U}{\sqrt{FL}}, \quad \underbrace{\text{Eu}}_{\text{n. de Euler}} =: \frac{\Pi}{\rho U^2}, \quad \underbrace{\text{Re}}_{\text{n. de Reynolds}} =: \frac{\rho UH}{\mu},$$

U (vel.), F (fuerza) Π (presión), ρ (dens.), μ (visc.)

(todos valores característicos de escala)



el análisis dimensional muestra que

Teoría de la lubricación (muy en breve)

las ecuaciones clásicas de balance se pueden escribir **en forma adimensional** así

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0,$$

$$\epsilon \text{Re} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial y} v_2 \right) = \epsilon \left(\frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2} \right) F_1 - \epsilon (\text{Eu} \cdot \text{Re}) \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$+ \left[\epsilon \frac{\partial S_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S_{12}}{\partial y} \right],$$

$$\epsilon^2 \text{Re} \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x} v_1 + \frac{\partial v_2}{\partial y} v_2 \right) = \epsilon \left(\frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2} \right) F_2 - (\text{Eu} \cdot \text{Re}) \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$+ \left[\epsilon \frac{\partial S_{12}}{\partial x} + \frac{\partial S_{22}}{\partial y} \right].$$

La paradoja

Dependiendo de los valores de Fr , Eu , Re y de ϵ se puede conseguir por diversas simplificaciones.

Sin embargo....

La paradoja

Dependiendo de los valores de Fr , Eu , Re y de ϵ se puede conseguir por diversas simplificaciones.

Sin embargo....

si el tensor S es lo del fluido de Bingham (núcleo rígido por asunto) y si el canal tiene una amplitud variable, el procedimiento clásico de re-escalado de la teoría clásica de lubricación lleva a una **paradoja**:

el “núcleo” tiene una velocidad variable en la dirección principal de movimiento y por lo tanto ¡ **no es rígido** !

Comentario: dominios con forma compleja son muy importantes en la industria (por ejemplo: moldeo por inyección, cojinete)

¿Como superar la paradoja?

Varias propuestas:

¿Como superar la paradoja?

Varias propuestas:

- modelo con dos viscosidad [Lipscomb & Denn (JNNFM,1984), Gartling & Phan-Thien (JNNFM, 1984): el modelo de Bingham se obtiene como un caso límite]
- correcciones “ad hoc” para regularizar y permitir pequeñas deformaciones del núcleo [Balmforth & Craster (JNNFM, 1999)]
- solución asintótica (sin embrago sólo para pequeñas variaciones de la amplitud de canal) [Frigaard & Ryan (JNNFM, 2004), Putza, Frigaard & Martinez (JNNFM, 2009)]

¿Como superar la paradoja?

Varias propuestas:

- modelo con dos viscosidad [Lipscomb & Denn (JNNFM,1984), Gartling & Phan-Thien (JNNFM, 1984): el modelo de Bingham se obtiene como un caso límite]
- correcciones “ad hoc” para regularizar y permitir pequeñas deformaciones del núcleo [Balmforth & Craster (JNNFM, 1999)]
- solución asintótica (sin embrago sólo para pequeñas variaciones de la amplitud de canal) [Frigaard & Ryan (JNNFM, 2004), Putza, Frigaard & Martinez (JNNFM, 2009)]

Cualquiera que sea el método, no se va más allá de resaltar la paradoja y, sin embargo, nadie ofrece una justificación rigurosa.

Nuestra propuesta

Nuestra propuesta

¡ **El núcleo no es rígido pero elástico !** La idea no es nueva [Oldroyd (Proc. Camb.Phil. Soc. 1947)], **pero nunca ha sido aplicada al tema de la paradoja de la teoría de la lubricación.**

Nuestra propuesta

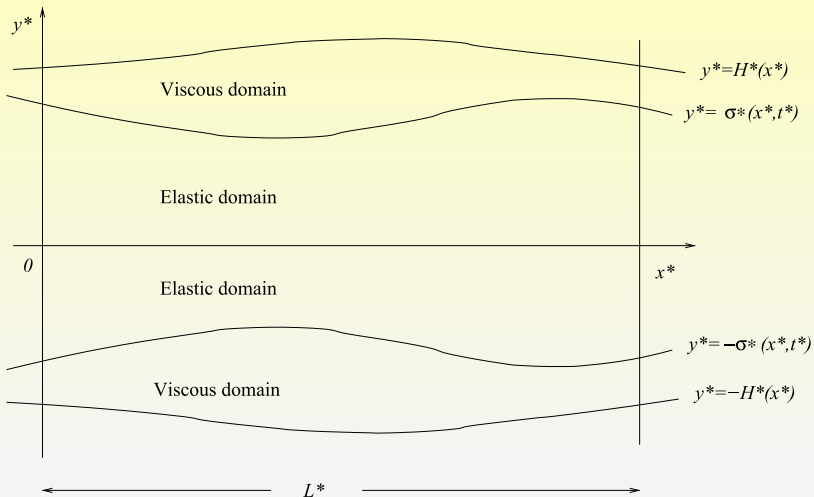
¡ **El núcleo no es rígido pero elástico** ! La idea no es nueva [Oldroyd (Proc. Camb.Phil. Soc. 1947)], **pero nunca ha sido aplicada al tema de la paradoja de la teoría de la lubricación.**

Si aplicada al movimiento de un fluido en un canal impulsado por un gradiente de presión **permite resolver la paradoja** (¡ cualquier que sea el perfil del canal !)

Referencias:

- 1 L. Fusi, A. Farina, F. Rosso *Flow of a Bingham-like fluid in a finite channel of varying width: A two scale approach* (JNNFM, 2012)
- 2 L. Fusi, A. Farina, F. Rosso *Gravity Driven Flow of a Bingham Fluid on an Inclined Surface: A Physical Paradox* (Phys.Fluids, 2012 presentado)

Geometría



Ecuaciones del modelo (dimensional)

$$\det \mathbf{F} = 1 \text{ (incompresibilidad mecánica)} \left[\mathbf{F} = \text{grad}^* \left(\vec{\chi}^* (\vec{X}^*, t^*) \right) \right]$$

$$\left[\mathbf{S}^* - \left(2\eta^* + \frac{\tau_o^*}{\|\mathbf{D}^*\}} \right) \mathbf{D}^* \right] \Theta (\|\mathbf{s}^* - \tau_o^*)$$

$$+ \quad (\mathbf{S}^* - 2\kappa^* \mathbf{E}) \Theta (\tau_o^* - \|\mathbf{s}^*) = 0 \quad (\text{eq. constitutiva implícita})$$

κ^* (módulo de elasticidad)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left[\nabla^* \vec{f}^* + \left(\nabla^* \vec{f}^* \right)^T \right] \quad (\text{tensor deformación lineal})$$

$$\vec{f}^* = \vec{\chi}^* - \vec{X}^* \quad (\text{desplazamiento})$$

Escalamiento dimensional

$$\text{Re} = \frac{\rho^* U^* h^*}{\eta^*}, \quad \text{Bi} = \frac{\tau_o^* h^*}{\eta^* U^*}, \quad y = \frac{1}{\varepsilon} \frac{y^*}{L^*}, \quad t = \frac{t^*}{t_c^*}, \quad \left(t_c^* = \frac{L^*}{U^*} \right)$$

$$v_1 = \frac{v_1^*}{U^*}, \quad v_2 = \frac{v_2^*}{\varepsilon U^*}, \quad P = \frac{P^*}{P_c^*}, \quad H^*(x^*) = h^* h(x^*),$$

siendo $P_c^* = \frac{\eta^* U^* L^*}{h^{*2}}$ (clásical formula de Poiseuille, el gradiente de presión se supone dado), $h^* = \max_{x^* \in [0, L^*]} H^*(x^*)$, (orden de magnitud de $H^*(x^*)$) y

$$h(x^*)$$

es una función adimensional de tal manera que $0 < h \leq 1$.

Ecuaciones en forma adimensional

$$\begin{aligned} \epsilon \operatorname{Re} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial y} v_2 \right) = \\ - \frac{\partial P}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x} (S_{11}) + \frac{\partial}{\partial y} (S_{12}), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^3 \operatorname{Re} \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x} v_1 + \frac{\partial v_2}{\partial y} v_2 \right) = \\ - \frac{\partial P}{\partial y} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} (S_{12}) + \epsilon \frac{\partial}{\partial y} (S_{22}), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

re-escalando el desplazamiento

$$f_1 = \frac{f_1^*}{L^*}, \quad f_2 = \frac{1}{\epsilon} \frac{f_2^*}{L^*},$$

sigue

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial f_1}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial f_1}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Frontera libre $y = \sigma(x, t)$

(No es una frontera material!)

criterio de von Mises (adimensional): $II_S \lesseqgtr Bi$.

- región elástica $0 < y < \sigma(x, t)$, donde $II_S < Bi$;
- región viscosa $\sigma(x, t) < y < h(x)$, donde $II_S \geq Bi$.

normal y tangente:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^2}} \left(-\epsilon \frac{\partial \sigma}{\partial x} \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \right), \quad (5)$$

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^2}} \left(\vec{e}_1 + \epsilon \frac{\partial \sigma}{\partial x} \vec{e}_2 \right), \quad (6)$$

Velocidad normal interfacial

$$w = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^2}} \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

velocidad de deformación

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) & \varepsilon \frac{\partial v_2}{\partial y} \end{pmatrix},$$

$$\|\mathbf{D}\| = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \right)^2 + 2\varepsilon^2 \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} \right)^2 \right]}.$$

Condiciones sobre $y = \sigma(x, t)$

$$[[\rho]] = 0, \quad [[\vec{v}]] \cdot \vec{t} = 0 \text{ (no-slip), es decir } [[v_1]] + \epsilon^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} [[v_2]] = 0.$$

$$\text{Rankine-Hugoniot} \Rightarrow [[\vec{v}^*]] \cdot \vec{n} = 0, \text{ es decir} \\ -\frac{\partial \sigma}{\partial x} [[v_1]] + [[v_2]] = 0.$$

$$\text{Simplificando sigue } [[v_1]] = [[v_2]] = 0.$$

$$\text{Tambi\u00e9n Rankine-Hugoniot implica } [[\mathbf{T}^* \vec{n}]] \cdot \vec{n} = 0, \text{ es decir}$$

$$-[[P]] \left(1 + \epsilon^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 \right) + \left[\left[\epsilon^3 S_{11} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 - 2\epsilon^2 S_{12} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \epsilon S_{22} \right] \right] = 0.$$

$$\text{y } [[\mathbf{T}^* \vec{t}]] \cdot \vec{n} = 0, \text{ es decir}$$

$$[[S_{12}]] + \epsilon \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left[\left[S_{22} - S_{11} - \epsilon S_{12} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \right] = 0.$$

Otras condiciones de borde

sobre $y = h(x)$: $\vec{v}(x, h(x), t) \equiv 0$ (no deslizamiento y no permeable)

Gradiente de presión dado:

$$P(0, y, t) = P_{in}(t), \quad \text{and} \quad P(1, y, t) = P_{in}(t) - \Delta P(t), \quad \Delta P \geq 0,$$

siendo $P_{in}(t) = P_{in}^*(t) / P_c^*$, y $\Delta P(t) = \Delta P^*(t) / P_c^*$.

Simetría en $y = 0$ para el desplazamiento:

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad f_2(x, 0, t) = 0, \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \quad (8)$$

Dominio elástico: $0 < x < 1$, $0 < y < \sigma(x, t)$

$$\mathbf{S} = 2\Gamma \mathbf{E} = \Gamma \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial f_1}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial f_1}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial f_2}{\partial x} & 2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix},$$

siendo $\Gamma = \frac{\kappa^* h^*}{\eta^* U^*} = \text{Re} / \left(\frac{U^*}{c^*} \right)^2$, y $c^{*2} = \kappa^* / \rho^*$ (c^* velocidad del sonido)

Dominio elástico: $0 < x < 1$, $0 < y < \sigma(x, t)$

Por otra parte $v_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t}$, while $v_2 = \frac{\partial f_2}{\partial t}$ así que las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \operatorname{Re} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial t} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial t} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right) = \\ -\epsilon \frac{\partial P}{\partial x} + \Gamma \left(2\epsilon^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \epsilon \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^3 \operatorname{Re} \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial t} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial t} \frac{\partial f_2}{\partial t} \right) = \\ -\frac{\partial P}{\partial y} + \Gamma \left(\epsilon \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} + \epsilon^3 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

Dominio viscoso: $0 < x < 1, \sigma(x, t) < y < h(x)$

Ahora

$$\mathbf{S} = \left(1 + \frac{\text{Bi}}{2\text{Ii}_D}\right) \begin{pmatrix} 2\epsilon \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} + \epsilon^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} + \epsilon^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} & 2\epsilon \frac{\partial v_2}{\partial y} \end{pmatrix},$$

siendo

$$\text{Ii}_D = \frac{\text{Ii}_D^*}{\frac{U^*}{h^*}} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \epsilon^2 \frac{\partial v_2}{\partial x}\right)^2 + 2\epsilon^2 \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)^2\right]}.$$

Dominio viscoso: $0 < x < 1$, $\sigma(x, t) < y < h(x)$

asi que las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \epsilon \text{Re} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial y} v_2 \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \\ 2\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{\text{Bi}}{2l_D} \right) \frac{\partial v_1}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\text{Bi}}{2l_D} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \epsilon^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right], \\ \epsilon^3 \text{Re} \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x} v_1 + \frac{\partial v_2}{\partial y} v_2 \right) &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \\ \epsilon^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{\text{Bi}}{2l_D} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \epsilon^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\text{Bi}}{2l_D} \right) \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Descuidando los términos de orden $\mathcal{O}(\varepsilon)$

La condición de continuidad de estrés se simplifica:

$$\frac{\Gamma}{\varepsilon} \frac{\partial f_1}{\partial y} \Big|_{y=\sigma^-} = \left[\left(1 + \frac{\text{Bi}}{2l_D} \right) \frac{\partial v_1}{\partial y} \right]_{y=\sigma^+},$$

El modelo es consistente si

1 $l_S < \text{Bi}$, cuando $0 < y < \sigma$, es decir

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)^2 + 2\varepsilon^2 \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^2 \right]} \leq \varepsilon \frac{\text{Bi}}{\Gamma}. \quad (11)$$

2 $l_S \geq \text{Bi}$, cuando $\sigma < y < 1$, es decir $l_D \geq 0$, siendo

$$l_S = \left(1 + \frac{\text{Bi}}{2l_D} \right) 2l_D.$$

Expansión asintótica

Sustituyendo

$$\phi(x, y, t) = \phi^{(0)}(x, y, t) + \epsilon \phi^{(1)}(x, y, t) + \epsilon^2 \phi^{(2)}(x, y, t) + \dots$$

dentro de las ecuaciones adimensionales de movimiento, resolvemos los problemas de contorno obtenidos por equiparación de órdenes sucesivas de ϵ . El procedimiento de igualación necesita la especificación de los números característicos Re , Bi , y Γ .

Comenzamos suponiendo que:

- 1 $Re \leq \mathcal{O}(1)$, (es decir flujo laminar)
- 2 $Bi = \mathcal{O}(1)$.

Dos casos

$$(1) \quad \Gamma = \mathcal{O}(1).$$

$$(2) \quad \Gamma = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Si $\Gamma = \mathcal{O}(1)$, se recupera el clásico modelo de Bingham, mientras que el caso $\Gamma = \mathcal{O}(\varepsilon)$ corresponde a una deformación de núcleo no despreciable.

Interpretación física: sean $s_{c,vis}^*$ (estrés viscoso característico), $s_{c,el}^*$ (tensión elástica característica), δ_x^* (deformación longitudinal característica, es decir, la diferencia de desplazamiento longitudinal)

$$s_{c,vis}^* = \eta^* \frac{U^*}{h^*}, \quad \text{and} \quad s_{c,el}^* = \kappa^* \frac{\delta_x^*}{h^*},$$

Interpretación física

La continuidad de el esfuerzo sobre $y = \sigma(x, t)$ implica

$$s_{c,el}^* \sim s_{c,vis}^* \Rightarrow \frac{\delta_x^*}{L^*} \sim \varepsilon \frac{\eta^* U^*}{\kappa^* h^*} = \frac{\varepsilon}{\Gamma}.$$

Entonces

$$\Gamma = \mathcal{O}(1) \Rightarrow \delta_x^*/L^* \sim \varepsilon$$

es decir **deformación longitudinal característica del núcleo insignificante!** (como en el Bingham clásico).

Interpretación física

El caso $\Gamma = \mathcal{O}(1)$ puede producirse también si κ^* es pequeño, a condición de que el estrés viscoso $\eta^* U^*/h^*$ tiene el mismo tamaño de κ^* (¡ estrés no bastante fuerte para producir una deformación significativa !).

Por otra parte, si $\Gamma = \mathcal{O}(\varepsilon)$, ocurre que

$$\delta_x^*/L^* = \mathcal{O}(1)$$

y la deformación longitudinal característica del núcleo ya no es insignificante (el desplazamiento longitudinal no es uniforme en y).

Este caso es nuevo en la literatura (¡ por lo que sabemos !) y también hay ejemplos físicos (emulsiones agua/aceite) tal que $\Gamma = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

Razón heurística para la paradoja

La incompresibilidad mecánica, la continuidad de el esfuerzo sobre $y = \sigma(x, t)$ y la hipótesis $\Gamma = \mathcal{O}(1)$ son **incompatibles** si $h'(x) \neq 0$: en efecto

- (incompresibilidad) $\boxed{\frac{\delta_y^*}{h^*}} \sim \frac{\delta_x^*}{L^*}$

- (continuidad de el estrés)

$$s_{c, el}^* \sim s_{c, vis}^* \Leftrightarrow \frac{\delta_x^*}{L^*} \sim \varepsilon \frac{\eta^* U^*}{\kappa^* h^*} = \boxed{\frac{\varepsilon}{\Gamma}}$$

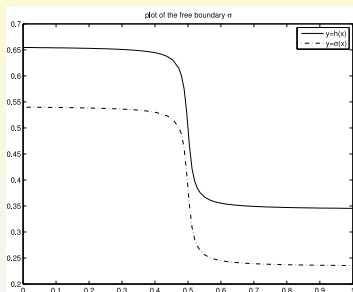
(δ_y^* orden de magnitud de la deformación transversal).

Entonces

$$\boxed{\frac{\delta_y^*}{h^*} \sim \frac{\varepsilon}{\Gamma}}$$

Razón heurística para la paradoja

Ahora, si $\Gamma = \mathcal{O}(1)$, sucede que $\delta_y^*/h^* \sim \varepsilon$. Al mismo tiempo si permitimos cambios significativos en la geometría del canal (por ejemplo anchura reducida de un factor ~ 0.5),



es imposible cumplir con el requisito $\delta_y^*/h^* \sim \varepsilon$ (el núcleo debe deformarse significativamente).

La paradoja desde el punto de vista matemático

¡ No hay ninguna justificación matemática rigurosa de la paradoja !

Si hacemos el análisis asintótica en el caso $\Gamma = \mathcal{O}(1)$, a la potencia cero se encuentra el modelo de Bingham clásico, es decir,

- $P^{(0)} = P^{(0)}(x, t)$ (presión uniforme en cada sección del canal)
- $\left| \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} \right| \sigma \leq \text{Bi}$ (condición de consistencia en $0 < y < \sigma$)
- $v_2^{(0)} = 0$, $v_1^{(0)} = \omega(t)$ si $0 \leq y \leq \sigma$ (movimiento rígido en el núcleo)

La paradoja desde el punto de vista matemático

- si $\sigma \leq y \leq h(x)$

$$\begin{aligned}
 v_1^{(0)}(x, y, t) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} (h^2 - y^2) + \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} \sigma (h - y) \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} (h^2 - y^2) + \\
 &\quad \text{Bi sign} \left(\left. \frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial y} \right|_{y=\sigma^+} \right) (h - y). \quad (12)
 \end{aligned}$$

En particular ocurre que

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h + \sigma}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x}} \quad (13)$$

La paradoja desde el punto de vista matemático

Usando la ecuación de continuidad se prueba de que

$$(h - \sigma)^2 \left[\frac{1}{6} \frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} (\sigma + 2h) + \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right] = 0 \quad (14)$$

que, si $\frac{\partial h}{\partial x} \equiv 0$, también prueba que

$$\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} = 0, \Rightarrow P^{(0)}(x, t) = P_{in}(t) - x \Delta P(t),$$

y, en consecuencia,

$$\sigma(t) = \frac{Bi}{\Delta P(t)} \quad (\text{solución clásica})$$

La paradoja desde el punto de vista matemático

Entonces

$$\sigma(t) < h \Leftrightarrow \frac{Bi}{\Delta P(t)} < h,$$

es la condición clásica de Bingham para haber un flujo en el canal.

Sin embargo, si h **depende de** x

(14) no ofrece cualquier solución compatible con (13).

Esto es lo que es conocido como la “paradoja (del modelo de Bingham cuando se utiliza la teoría) de la lubricación”

La paradoja desde el punto de vista matemático

Prueba: sabemos que

$$\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x},$$

usando (14) sigue

$$\frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} (h - \sigma)^2 \left[\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\sigma + 2h}{6\sigma} \right] = 0.$$

Si que ahora

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\sigma + 2h}{6\sigma} = \frac{\partial h}{\partial x} \quad (15)$$

De otra parte si utilizamos (15) entre (13) sigue $h = -2\sigma$
 ¡ **ABSURDO** !

Caso $\Gamma = \mathcal{O}(\varepsilon)$ (dominio elástico)

Pongamos $\hat{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\varepsilon}$, así que $\hat{\Gamma} = \mathcal{O}(1)$. Como en el primer caso $P^{(0)} = P^{(0)}(x, t)$, pero ahora en el dominio elástico

$$f_1^{(0)} = \frac{1}{2\hat{\Gamma}} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} y^2 + a(x, t), \quad (16)$$

así que la velocidad longitudinal $v_1^{(0)}$ en el núcleo es

$$v_1^{(0)} = \frac{1}{2\hat{\Gamma}} \frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial t \partial x} y^2 + \omega(x, t),$$

donde $\omega(x, t) = \frac{\partial a(x, t)}{\partial t}$ puede verse como la parte uniforme de la velocidad longitudinal.

Interpretación física

El desplazamiento longitudinal, en el orden cero en ε , es la superposición de:

- 1 un desplazamiento uniforme (con respecto a y), es decir, $a(x, t)$,
- 2 un desplazamiento no uniforme (es decir, una deformación) modulada por el gradiente de presión. Tal deformación puede llegar a ser insignificante en el caso $\hat{\Gamma} \gg 1$, es decir $\Gamma = \mathcal{O}(1)$

Caso $\Gamma = \mathcal{O}(\varepsilon)$ (dominio viscoso)Problema matemático de orden cero en ε

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} \sigma = -\text{Bi}, \\ \frac{1}{2} \hat{\Gamma} \frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial t \partial x} \sigma^2 + \omega(x, t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} (h - \sigma)^2, \\ - (h - \sigma)^2 \left[\frac{1}{6} \frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} (2h + \sigma) + \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \\ \frac{\sigma^3}{6} \hat{\Gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} \right) + \sigma \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (17)$$

Buscamos soluciones estacionarias

Teorema: El sistema estacionario $\left(\frac{\partial}{\partial t}(\bullet) \equiv 0\right)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} \sigma = -Bi, \\ \omega(x, t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} (h - \sigma)^2, \\ -(h - \sigma)^2 \left[\frac{1}{6} \frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} (2h + \sigma) + \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \sigma \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \end{array} \right.$$

admite una solución única para h dependiente de x , con

$$0 < h_m < h(x) < h_M, \quad x \in [0, 1], \quad (18)$$

y con $h(x)$ suficientemente regular.

Una condición de flujo nueva

Sea

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{dx}{h(x)}, \quad \text{with} \quad \frac{1}{h_M} < \mathcal{A} < \frac{1}{h_m}, \quad (19)$$

La existencia de una solución implica

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sigma(x)} > \mathcal{A}.$$

asi que

$$\boxed{\frac{\Delta P}{\text{Bi}} > \mathcal{A}}. \quad (20)$$

Esta es una generalización de la relación $\frac{\Delta P}{\text{Bi}} > 1$, (condición de Bingham clásica para haber flujo).

Una condición de flujo nueva

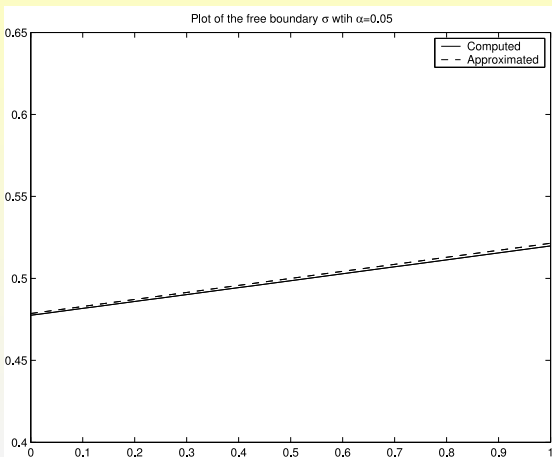
Usando variables dimensionales haría

$$\frac{\Delta P^*}{\tau_o^*} > \int_0^{L^*} \frac{dx^*}{H^*(x^*)} = \frac{L^*}{h^*} \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{h(x)}}_{\mathcal{A}}, \quad (21)$$

mientras que la de Bingham es $\frac{\Delta P^*}{\tau_o^*} > \frac{L^*}{h^*}$.

Se puede mostrar que, si la (21) (o la (20)) es verificada, la solución del problema estacionario es única y viceversa.

└ Primera paradoja: canal horizontal de ancho variable

Ejemplo: $h(x) = 1 + \alpha x$, $\alpha \ll 1$ Figura: Plot de $y = \sigma(x)$ with $\alpha = 0,05$.

└ Primera paradoja: canal horizontal de ancho variable

Ejemplo:
$$h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \arctan \left[80 \left(x - \frac{1}{2} \right) \right]$$

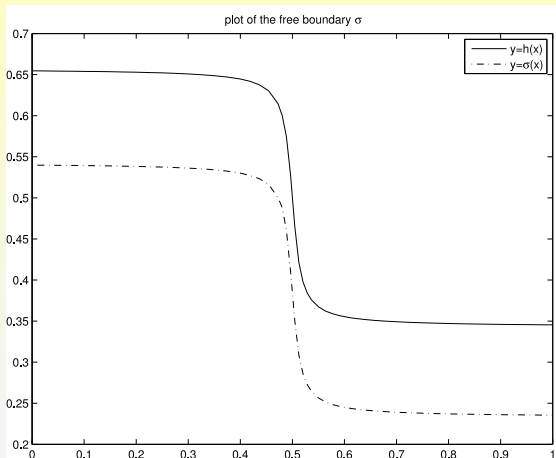


Figura: Plot de $y = \sigma(x)$ y $\Delta P/Bi = 2$.

└─Primera paradoja: canal horizontal de ancho variable

Ejemplo:
$$h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \arctan \left[80 \left(x - \frac{1}{2} \right) \right]$$

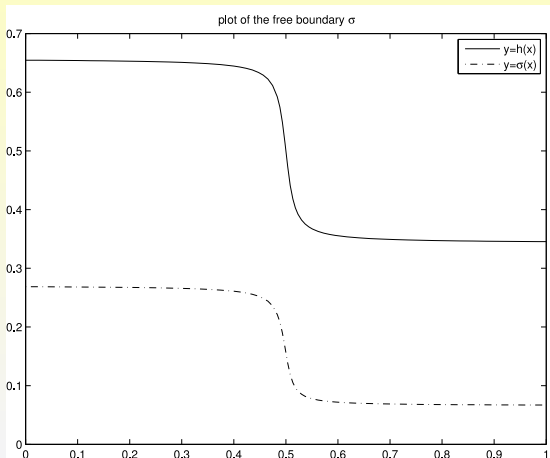
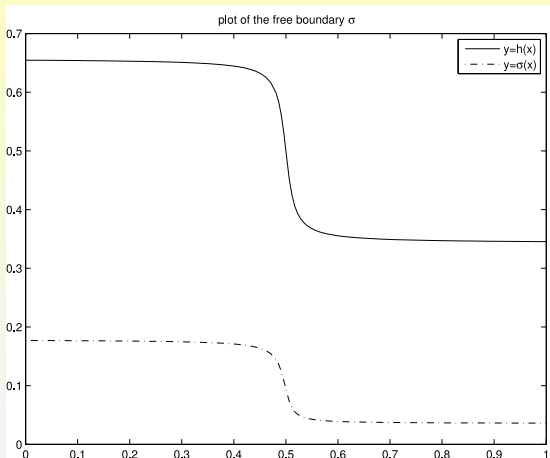


Figura: Plot de $y = \sigma(x)$ y $\Delta P/Bi = 8$.

└ Primera paradoja: canal horizontal de ancho variable

$$\text{Ejemplo: } h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \arctan \left[80 \left(x - \frac{1}{2} \right) \right]$$

Figura: Plot de $y = \sigma(x)$ y $\Delta P/\text{Bi} = 15$.

$$\text{Ejemplo: } h(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \arctan \left[80 \left(x - \frac{1}{2} \right) \right]$$

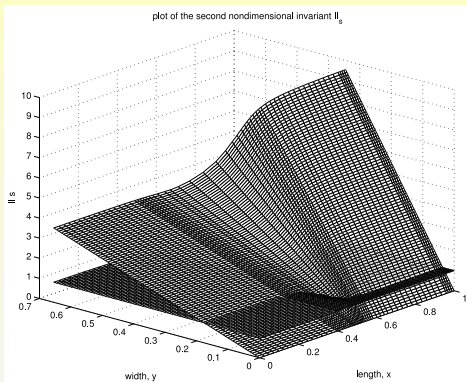


Figura: Gráfico de la invariante adimensional II_5 por $\Delta P = 15$ y $Bi = 15$. La proyección sobre el plano (x, y) de la intersección entre la superficie y el plano es la curva $y = \sigma(x)$.

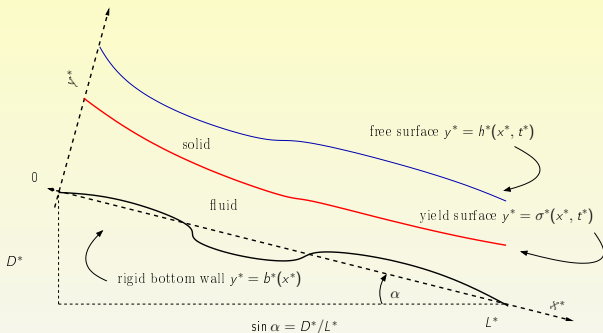
Problema abierto

El problema existencia y unicidad en el caso de orden cero (caso no estacionario)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} \sigma = -\text{Bi}, \\ \frac{1}{2 \hat{\Gamma}} \frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial t \partial x} \sigma^2 + \omega(x, t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} (h - \sigma)^2, \\ - (h - \sigma)^2 \left[\frac{1}{6} \frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} (2h + \sigma) + \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \\ \frac{\sigma^3}{6 \hat{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} \right) + \sigma \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (22)$$

└ Segunda paradoja: movimiento sobre una superficie inclinada que no es un plano

Flujo de un fluido Bingham en una superficie inclinada bajo la acción de la gravedad



Nuestra hipótesis: $y^* = b^*(x^*)$ bastante regular, $\tan \alpha = \mathcal{O}(1)$, $b^{* \prime}$ regular y acotada, fluido en movimiento lento, aproximación de lubricación

└ Segunda paradoja: movimiento sobre una superficie inclinada que no es un plano

Si $b^{*''} \neq 0$ y si se utiliza el modelo clásico de Bingham,

$$\left[\mathbf{S}^* - \left(2\eta^* + \frac{\tau_o^*}{\|\mathbf{D}^*\|} \right) \mathbf{D}^* \right] \Theta (\|\mathbf{s}^* - \tau_o^*) + \mathbf{D}^* \Theta (\tau_o^* - \|\mathbf{s}^*) = 0,$$

hay otra paradoja.

¡ Este caso es totalmente nuevo! Nunca ha sido considerado en la literatura.

Como anteriormente, la paradoja se puede resolver permitiendo deformaciones del núcleo, donde la tensión es inferior al valor umbral.

Misma técnica matemática (modelo con dos escalas).

Escalas características

Caudal Q^* dado.

$$H^* = \left(\frac{\eta^* Q^*}{\varrho^* g^* \sin \alpha} \right)^{1/3}$$

$$Q^* = U^* \cdot H^*, \quad \varepsilon = H^*/L^* \ll 1$$

y dos escalas diferentes para la presión:

- 1 si $\alpha = \mathcal{O}(1)$, la **escala “natural” de P^* es**
 $\varrho^* g^* L^* \sin \alpha = \varrho^* g^* D^*$. La presión hidrostática a lo largo de y^* (es decir $\varrho^* g^* H^*$) es insignificante con respecto a $\varrho^* g^* D^*$.
En este caso la presión es uniforme en y al orden cero;
- 2 si $\alpha = \mathcal{O}(\varepsilon)$, $\varrho^* g^* D^*$ y $\varrho^* g^* H^*$ son comparable así que la **variación de la presión a lo largo de y debe tenerse en cuenta.**

Modelo

sobre la superficie de fluencia $y = \sigma(x, t)$:

- $[[\rho^*]] = 0$
- No-slip $\Leftrightarrow [[\vec{u}^*]] \cdot \vec{t}_\sigma = 0$, es decir

$$[[u_1]] + \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} [[u_2]] = 0, \quad (23)$$

- (Rankine-Hugoniot)

$$-\frac{\partial \sigma}{\partial x} [[u_1]] + [[u_2]] = 0. \quad (24)$$

-

$$[[\mathbf{T}^* \vec{n}_\sigma]] \cdot \vec{n}_\sigma = 0, \quad [[\mathbf{T}^* \vec{n}_\sigma]] \cdot \vec{t}_\sigma = 0.$$

Modelo

Sobre $y^* = h^*(x^*, t^*)$: ausencia de esfuerzo más la condición

cinemática $\frac{\partial h}{\partial t} = u_2 - u_1 \frac{\partial h}{\partial x}$.

Hipótesis de “creeping flow” (términos de inercia igual a cero)

$$\begin{cases} -P \left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) + \left(\varepsilon^3 S_{11} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - 2\varepsilon^2 S_{12} \frac{\partial h}{\partial x} + \varepsilon S_{22} \right) = 0, \\ S_{12} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} \left(S_{22} - S_{11} - \varepsilon S_{12} \frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

└ Segunda paradoja: movimiento sobre una superficie inclinada que no es un plano

Modelo

Condición de no-slip y de impermeabilidad en $y = b(x)$:

$$\vec{u}(x, b(x), t) \equiv 0.$$

Buscamos una solución

$$\phi(x, y, t) = \phi^{(0)}(x, y, t) + \varepsilon \phi^{(1)}(x, y, t) + \varepsilon^2 \phi^{(2)}(x, y, t) + \dots$$

└ Segunda paradoja: movimiento sobre una superficie inclinada que no es un plano

¡ Paradoja: $\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} = 0$ no esta permitida !

Suponiendo $B_i = \mathcal{O}(1)$ y el modelo clásico de Bingham, se prueba en particular que la componente transversal de la velocidad en el dominio sólido es

$$u_2^{(0)} = \frac{\sigma_o^2}{2} \frac{\partial b}{\partial x}.$$

Sin embargo, en el dominio sólido se permiten sólo las traducciones **rígidas**

$$\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x} = 0, \Rightarrow \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} = 0,$$

que nunca se cumple, a menos que la superficie inferior es un plano.

└ Segunda paradoja: movimiento sobre una superficie inclinada que no es un plano

El caso especial $\alpha \sim \varepsilon$; Otra paradoja !

Ahora la presión se escala de manera diferente y esto cambia algunas ecuaciones.

La demostración es mucho más complicada pero se puede demostrar una vez más la incompatibilidad del modelo clásico de Bingham con la teoría de la lubricación.

└ Segunda paradoja: movimiento sobre una superficie inclinada que no es un plano

Conclusiones

Conclusiones

- 1 Cuando la geometría del dominio no es sencilla, la teoría de la lubricación y el modelo clásico de Bingham lleva en aparentes paradojas y por tanto son incompatibles.

Conclusiones

- 1 Cuando la geometría del dominio no es sencilla, la teoría de la lubricación y el modelo clásico de Bingham lleva en aparentes paradojas y por tanto son incompatibles.
- 2 La paradoja no se produce si el núcleo se supone elástico

Conclusiones

- 1 Cuando la geometría del dominio no es sencilla, la teoría de la lubricación y el modelo clásico de Bingham lleva en aparentes paradojas y por tanto son incompatibles.
- 2 La paradoja no se produce si el núcleo se supone elástico
- 3 Todas las demostraciones utilizan la técnica llamada “expansión asintótica” para modelos con dos escalas.

Conclusiones

- 1 Cuando la geometría del dominio no es sencilla, la teoría de la lubricación y el modelo clásico de Bingham lleva en aparentes paradojas y por tanto son incompatibles.
- 2 La paradoja no se produce si el núcleo se supone elástico
- 3 Todas las demostraciones utilizan la técnica llamada “expansión asintótica” para modelos con dos escalas.
- 4 Los problemas de frontera libre asociados a la expansión todavía están abiertos con respecto a la existencia y unicidad.

Conclusiones

- 1 Cuando la geometría del dominio no es sencilla, la teoría de la lubricación y el modelo clásico de Bingham lleva en aparentes paradojas y por tanto son incompatibles.
- 2 La paradoja no se produce si el núcleo se supone elástico
- 3 Todas las demostraciones utilizan la técnica llamada “expansión asintótica” para modelos con dos escalas.
- 4 Los problemas de frontera libre asociados a la expansión todavía están abiertos con respecto a la existencia y unicidad.
- 5 Hay otros importantes geometrías no triviales en las aplicaciones que no han sido estudiados desde este punto de vista ... todavía falta mucho a tener una visión completa de este tema.

Gracias
por su fina atención.